

Transport svetlobe po absorbcijsko-sipalnem modelu

Martin Šifrar, 28242021

10. december 2025

Uvod

V nalogi se bomo zanimali za transport svetlobe skozi volumetrične objekte, ki svetlobo absorbirajo in sipajo, npr. skozi sloje polprosojnih pigmentov, nanosenih na površino neprosojnega objekta. Čeprav je svetloba valovanje in je njen opis podan z valovno enačbo, bo za naše potrebe zadosten približek geometrijske optike, ki ga lahko gledamo kot limito nizkih valovnih dolžin, kjer zanemarimo uklon in interferenco. Takšna limita je formalizirano preko ikonalne enačbe, ki jo lahko izpeljemo iz Maxwellovih enačb [1, stran 117], ko gre $\lambda \rightarrow 0$. Uporabo takšne limite lahko v upravičimo s tem, da bo valovna dolžina majhna v primerjavi z karakterističnimi razdaljami, na katerih se spreminjajo lastnosti snovi.

V nadaljevanju bomo v limiti geometrijske optike transport svetlobe prevedli na opis z žarki, nato pa tega prevedli na obliko visokodimenzionalnega integrala, primerne za izračun z Monte-Carlo integracijo na računalniku. Dodatno, svetloba, ki jo izseva klasična ali LED žarnica, vsebuje mnogo valovnih dolžin. V začetku naša diskusija predpostavila, da imamo opravka z monokromatsko svetlobo. To bomo brez posebnih težav v razdelku 3.3 posplošili na primer, kjer svetloba vsebuje več valovnih dolžin. Zanimala nas bo tudi barva in vizualni izgled takšnih pigmentov oz. objektov, na katere so nanoseni. Tu bomo morali povedati nekaj osnov o tem, kako je koncept barve kvantitativno definiran. Čeprav je prehod konceptualno preprost, je pravilen prikaz vseeno nekoliko težaven, saj je človeški vid nelinearen, poleg tega pa računalniški monitor prikazuje RGB trojice v obsegu $[0, 1]$, z omejenim dinamičnim razponom prikaza.

1 Transport svetlobe vzdolž žarkov

Osnovni koncept geometrijske optike so žarki, t. j. krivulje pravokotne na valovne fronte, lokalno vzporedne z valovnim vektorjem¹. Vzdolž žarkov teče energijski tok svetlobe. Predpostavimo, da imajo mediji, po katerih bomo propagirali svetlobo, homogene lomne količnike. Tedaj so žarki, ki jih obravnavamo, odsekoma ravni; smer spremenijo le na stikih medijev z različnimi lomnimi količniki, po Snellovem lomnem zakonu.

Če v mediju ne bi imeli absorpcije ali sipanja, bi se energija vzdolž ravnih žarkov ohranjala. Definirati moramo primerne radiometrične fizikalne količine, s katerimi opisujemo širjenje svetlobe vzdolž žarkov. Žarkov je namreč v prostoru neštevno mnogo, in če bi vsakemu pripisali neko končno moč, bi bila skupna moč, ki vpada na neko površino, neskončna. Predstavljajmo si, da imamo sferično svetilo, ki oddaja moč Φ [W]. Ta moč oz. sevalni tok (ang. *radiant flux*) izvira iz površine svetila, torej je naravno definirati izsevanost (ang. *radiant exitance*) na površino kot

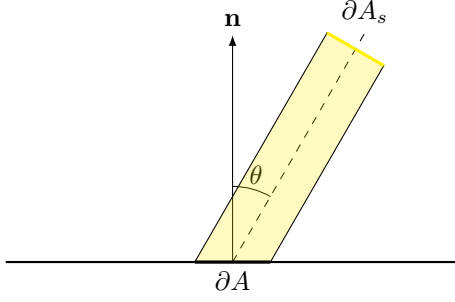
$$M = \frac{\partial \Phi}{\partial A}, \quad \text{izsevanost } [\text{Wm}^{-2}],$$

podobno lahko tok na enote površine pripišemo površinam, ki so osvetljene, kar poimenujemo obsevanost (ang. *irradiance*)

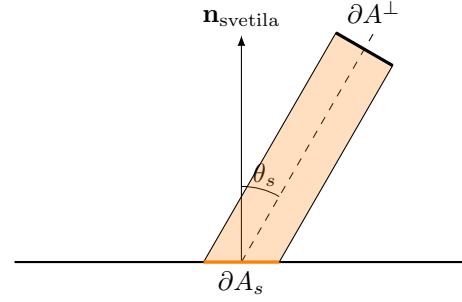
$$E = \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{A}}, \quad \text{obsevanost } [\text{Wm}^{-2}].$$

Da se izognemo težavam v razumevanju, je potrebno razločiti med površinama ∂A osvetljene površine in ∂A_s svetila. V tej distinkciji se ponuja povsem geometrijsko razumevanje tega, zakaj je obsevanost

¹V tej nalogi se izognemo diskusiji dvolomnih medijev, kjer Poyntingov vektor ni nujno vzporeden z valovnim vektorjem.



(a) Površina ∂A , osvetljena s svetlobo, ki vпада zgolj pod kotom θ .



(b) Površina svetila ∂A_s , ki jo zapuščajo žarki, parametrizirani s kotom θ_s .

Slika 1

površine odvisna od kota, pod katerim jo osvetljujemo. Recimo, da je površina ∂A na skici 1a osvetljena s kolimirano svetlobo ali točkastim svetilom, tako da svetloba na površino v tej točki vпада le pod enim kotom. Tedaj je svetlobni tok, izsevan iz površine svetila ∂A_s , porazdeljen na večjo površino $\partial A = \frac{\partial A_s}{\cos \theta}$ in obsevanost je sorazmerna izsevanosti svetila z faktorjem $\cos(\theta)$. Največja je, ko je osvetlitev pravokotna, t. j. vzporedna z normalo. Takšno razumevanje, kjer svetloba vпада le pod enim kotom θ je potrebno posplošiti na primer, ko vpadna svetloba izvira iz razsežnega svetila² in ni kolimirana. V takem splošnem primeru svetloba na osvetljeno površino vпада pod mnogimi različnimi koti, z žarkom za vsakega izmed kotov $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Da opišemo skupek žarkov, ki osvetlujejo površino pod različnimi koti, definiramo novo količino, sevalnost (ang. *radiance*)

$$L(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \omega \partial A^\perp}, \quad \text{sevalnost } [\text{Wm}^{-2} \text{sr}^{-1}], \quad (1)$$

ki pripada posameznim smerem $\omega = (\theta, \phi)$, iz katerih je površina osvetljena. Definirana je kot diferencialna količina, ki pripiše gostoto sevalnega toka $\frac{\partial \Phi}{\partial A^\perp} [\text{Wm}^{-2}]$ majhnemu stožčastemu skupku žarkov, ki oblikujejo stožec sferičnega kota $\partial \omega^3$ okoli osrednje smeri ω . Energijski tok poteka torej vzdolž žarka, v smeri ω in je enak $\frac{\partial \Phi}{\partial A^\perp} = L(\mathbf{x}, \omega) \cdot \partial A^\perp$ za neko testno površino $\partial A^\perp$, pravokotno na smer žarka (glej skico 1b).

Primer 1. Za kolimiran vir svetlobe (npr. z lečo kolimirano točkovno svetilo), so vsi žarki vzporedni in usmerjeni v eno smer, imenujmo jo smer ω_{kol} . Tedaj je sevalnost oblike $L(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\partial \Phi}{\partial A^\perp} \cdot \delta(\omega - \omega_{\text{kol}})$, tako da je gostota takšnega usmerjenega sevalnega toka enaka $\frac{\partial \Phi}{\partial A^\perp} = \int_{4\pi} L(\mathbf{x}, \omega) d\omega$. Gostota $\frac{\partial \Phi}{\partial A^\perp} [\text{Wm}^{-2}]$ kljub enotam ni obsevanost ali izsevanost, temveč je nekaj drugega – je lastnost kolimiranega snopa žarkov.

Osnovne relacije med L , M in E . Pomembno je, da razumemo osnovno razliko med sevalnostjo L , ki je lastnost žarkov, in količinama M , E . Izsevanost M in obsevanost E sta količini, ki sta smiselno definirani zgolj na površinah, ne pa tudi v praznem prostoru ali drugem mediju. Če površino osvetlujejo žarki z sevalnostmi $L(\mathbf{x}, \omega)$, bo obsevanost površine z žarki iz smeri $\omega = (\theta, \phi)$ enako

$$dE(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial A} = L(\mathbf{x}, \omega) \cos(\theta) d\omega, \quad \cos(\theta) = |\omega \cdot \mathbf{n}|, \quad (2)$$

Celotna obsevanost je integral po vseh smereh možne osvetlitve, tipično po hemisferi

$$E(\mathbf{x}) = \int_{2\pi} dE(\mathbf{x}, \omega). \quad (3)$$

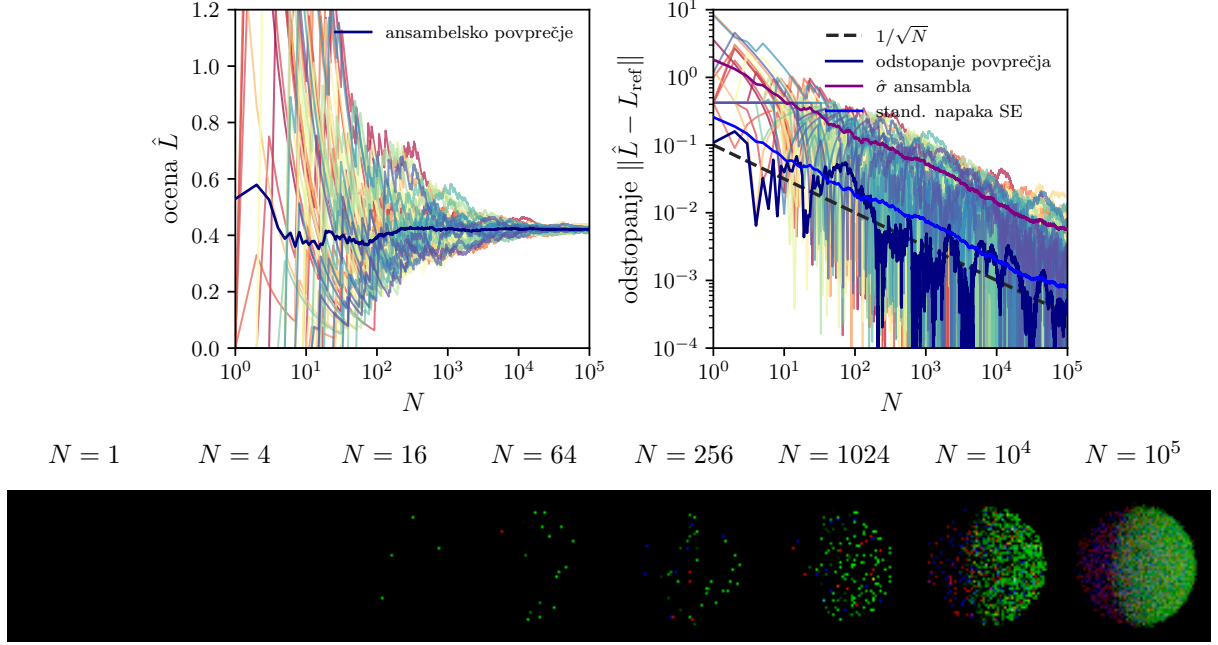
Povsem analogno je definirana izsevanost, le za površino na svetilu ∂A_s in normalo $\mathbf{n}_{\text{svetila}}$ (glej skico 1b). V diferencialni obliki je izsevanost v smer $\omega = (\theta_s, \phi)$ enaka

$$dM(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial A_s} = L(\mathbf{x}, \omega) \cos(\theta_s) d\omega, \quad \cos(\theta_s) = |\omega \cdot \mathbf{n}_{\text{svetila}}|.$$

²V nasprotju z točkastim svetilom, kjer ima svetloba le eno smer (proti svetilu) za vsako točko na osvetljeni površini.

³Sferični kot merimo v steradianih [sr] kot površino, zaobjeto na enotski krogli. Nekolična zloraba notacije je v tem, da z ω označimo smer, podano v sferičnih koordinatah s kotoma (θ, ϕ) , hkrati pa z $\partial \omega$ označujemo kot okoli te smeri.

Ocena sevalnosti $\hat{L}(\mathbf{x} = (0, 1, 0), \omega = (0, -1, 0))$ brez MIS



Slika 2: Poteki Monte Carlo integracije sevalnosti po številu vzorcev. (Zgoraj levo) 50 ločenih integracij in njihovo povprečje (temno modro). (Zgoraj desno) Narisano je odstopanje posameznih potekov integracije od najbolj točne izračunane vrednosti. Standardni odklon $\hat{\sigma}$ ansambla 50 integracij (vijolično) pada z $\frac{1}{\sqrt{N}}$, kot pričakujemo za Monte Carlo metodo. Oceno napake izračunanega povprečja (najtemnejše modro) lahko precej dobro zadanemo z izračunom standardne napake $SE = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{50}}$ (manj temno modro). (Spodaj) Slike krogle absorpcijsko-sipalnega medija za različno število vzorcev.

To lahko integriramo po prostorskem kotu in dobimo izsevanost iz točko na svetilu $\mathbf{x}$ kot

$$M(\mathbf{x}) = \int_{2\pi} dM(\mathbf{x}, \omega). \quad (4)$$

Primer 2. Predstavljajmo si neskončno ravnino, ki seva kot idealno črno telo. Sevalnost v bližini takšnega svetila je neničelna v zgornji hemisferi in je izotropna, neodvisna od kota ω . Izsevanost na površini ravnine podana z integralom 4, ki se zaradi izotropnosti radiance in translacijske simetrije neskončne ravnine $L(\mathbf{x}, \omega) = L$, poenostavi kot

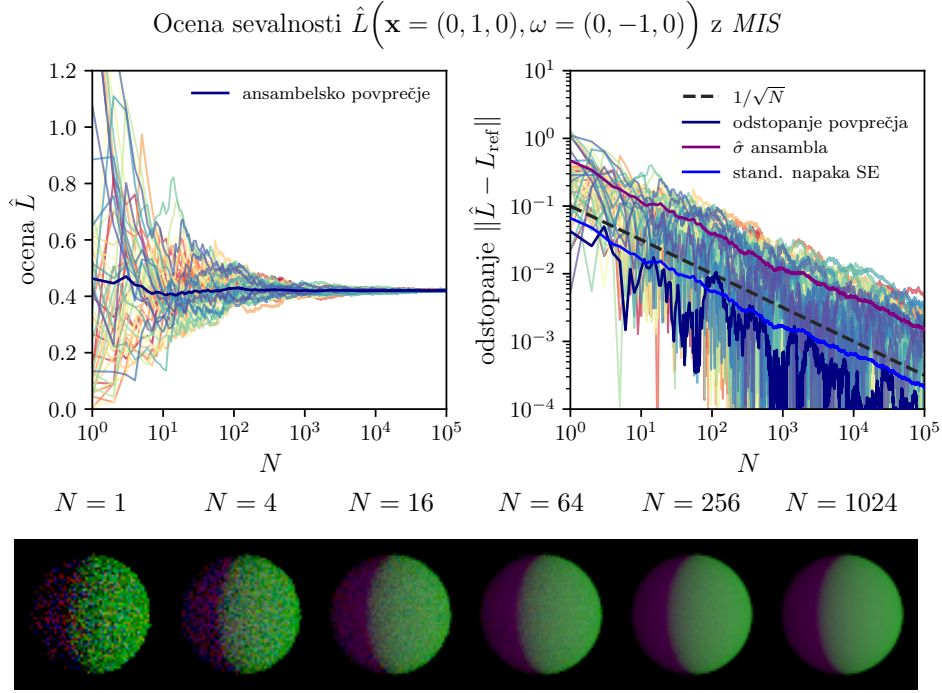
$$M(\mathbf{x}) = \int_{2\pi} dM(\mathbf{x}, \omega) = L \int_{2\pi} \cos(\theta_s) d\omega = \pi L.$$

Radianca je torej preproste oblike

$$L(\mathbf{x}, \omega) = M \cdot \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \omega \text{ v zgornji hemisferi} \\ 0 & \omega \text{ v spodnji hemisferi} \end{cases}, \quad M = \frac{\partial \Phi}{\partial A}.$$

Sevanje takega svetila upošteva Lambertov kosinusni zakon [1, str. 195], po katerem je jakost sevanja, izsevana v prostor pod kotom θ glede na normalo, sorazmerna s kosinusom kota z normalo $\cos \theta$. Jakost sevanja je moč na prostorski kot, diferencialno definirana kot $dI(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \omega} = L \cos(\theta_s) dA_s$. V zgornji hemisferi, kjer je L konstanten, tedaj velja Lambertov kosinusni zakon

$$I(\omega) = dI(\mathbf{x}, \omega) = \int_{A_s} dI(\mathbf{x}, \omega) = L \int_{A_s} \cos(\theta_s) dA_s = LA_s \cos(\theta_s), \quad \text{Lambertov kosinusni zakon.}$$



Slika 3: Poteki Monte Carlo integracije z dodatkom več-pomembnostnega vzorčenja (*multiple importance sampling* oz. MIS) sevalnosti po številu vzorcev. Slika je namenjena primerjavi z sliko 2, v primerjavi s katero je konvergenca mnogo hitrejša. Sam trend ostaja $\frac{1}{\sqrt{N}}$, a konstanta variance je mnogo manjša. Oblike krogel absorpcijsko-sipalnega medija (spodaj) so prepoznavne že z nekaj vzorcih, mnogo bolje kot pri 1000 in več vzorcih brez uporabe več-pomembnostnega vzorčenja.

Sevalnost (ang. *radiance*) je torej osnovna količina, ki opisuje usmerjen tok svetlobe vzdolž žarkov. Parametrizirana je glede na posamezne žarke, torej jo lahko razumemo kot funkcijo na prostoru vseh žarkov $(\mathbf{x}, \omega) \mapsto L(\mathbf{x}, \omega)$. V mediju brez absorpcije in sipanja se sevalnost vzdolž žarkov ohranja⁴, kar formalizira izrek o sevalnosti [9, pogl. 5.5]. Transport svetlobe smo prevedli na opis z žarki, ki ga bomo v nadaljevanju razširili, da bo vključeval sipanje in absorpcijo.

1.1 Absorpcijsko-sipalni model

V opisu transporta svetlobe z žarki smo zaenkrat izvzeli absorpcijo in sipanje svetlobe na gradnikih, ki sestavljajo medij. Vpliv absorpcije na transport svetlobe vzdolž žarka opisuje preprosta diferencialna enačba

$$(\omega \cdot \nabla)L(\mathbf{x}, \omega) = -\sigma_a(\mathbf{x})L(\mathbf{x}, \omega), \quad \text{absorpcija,} \quad (5)$$

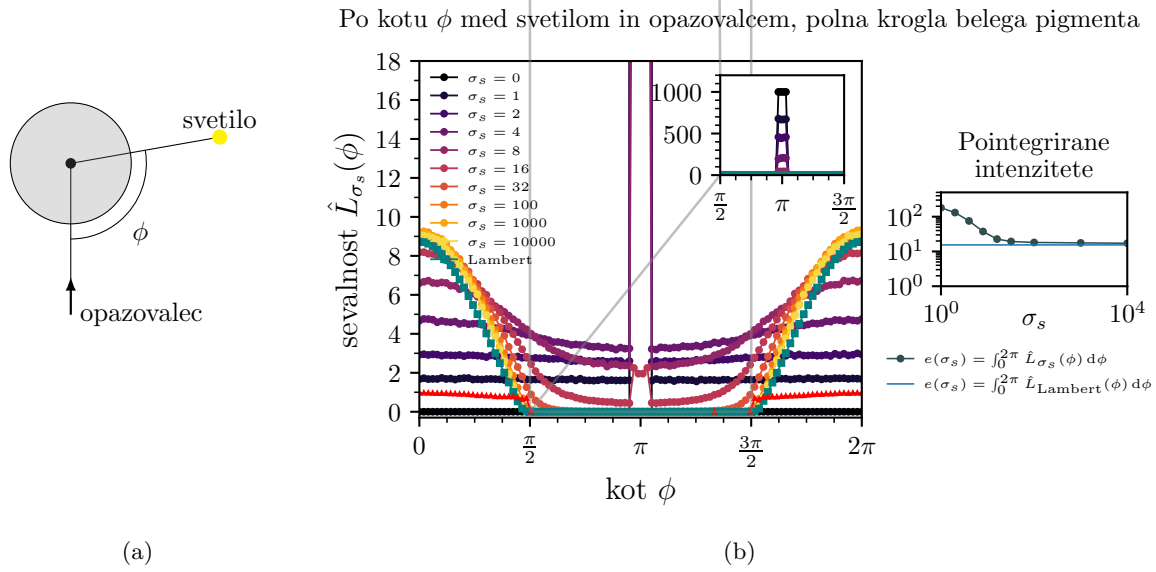
pri čemer je $\sigma_t(\mathbf{x}) [\text{m}^{-1}]$ absorpcijski koeficient medija. Po drugi strani je učinek sipanja dvostranski. Svetloba se na gradnikih medija iz žarka sipa navzven; t. i. od-sipanja (ang. *out-scattering*) sevalnost zmanjšuje na enak način kot absorpcija

$$(\omega \cdot \nabla)L(\mathbf{x}, \omega) = -\sigma_s(\mathbf{x})L(\mathbf{x}, \omega), \quad \text{od-sipanje,} \quad (6)$$

le da koeficient absorpcije nadomestimo z koeficientom sipanja $\sigma_s(\mathbf{x})$. Poleg od-sipanja se svetloba na gradnikih sipa iz drugih smeri $\omega' \neq \omega$. Do-sipanje žarku dovaja sevalnost, ko svetloba potuje vzdolž njega $(\omega \cdot \nabla)L(\mathbf{x}, \omega) = S(\mathbf{x}, \omega)$, pri čemer je do-sipalni integral $S(\mathbf{x}, \omega)$ definiran kot

$$S(\mathbf{x}, \omega) = \sigma_s(\mathbf{x}) \int_{4\pi} \phi(\mathbf{x}, \omega, \omega') L(\mathbf{x}, \omega') d\omega', \quad (7)$$

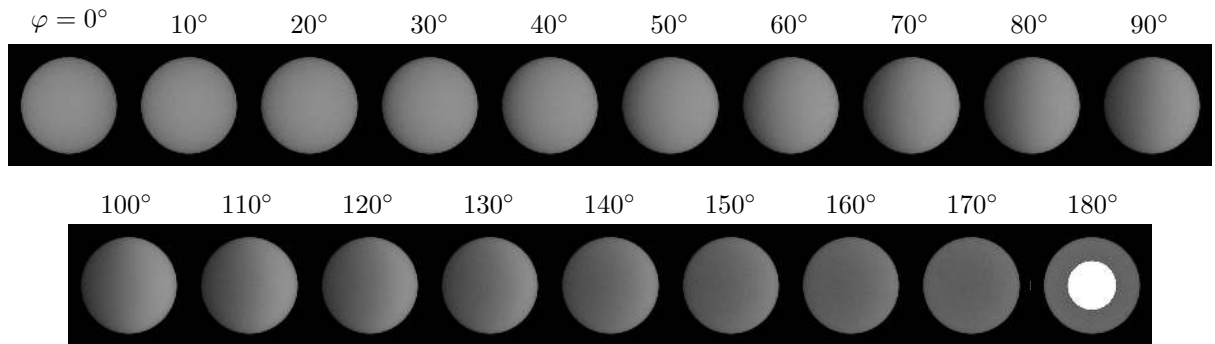
⁴Zares se ohranja količina $\tilde{L} = L/n^2$, tako imenovana osnovna sevalnost (*basic radiance*). A v naši nalogi vseskozi predpostavljamo, da je lomni količnik n posameznih medijev homogen, torej se zares ohranja L . Za dokaz ohranitvenega zakona v posplošeni obliki glej [8, str. 116].



torej sešteje prispevke vsem smeri ω' , iz katerih se svetloba do-sipa v naš žarek $(\mathbf{x}, \omega)$. Ko svetloba potuje vzdolž žarka, parametriziranega kot $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \omega t$ (pri čemer je t žarkovni parameter oz. pot vzdolž žarka), se torej absorbira in sipa. Celotni opis teh dveh procesov opisuje tako imenovana enačba sevalnega transporta [2] (ang. *radiative transfer equation*), ki združuje absorpcijo in sipanje

$$(\omega \cdot \nabla)L(\mathbf{x}, \omega) = \underbrace{-\sigma_a(\mathbf{x})L(\mathbf{x}, \omega) - \sigma_s(\mathbf{x})L(\mathbf{x}, \omega)}_{\substack{\text{absorpcija in od-sipanje,} \\ \text{skupni } \sigma_t = \sigma_a + \sigma_s}} + \underbrace{\sigma_s(x) \int_{4\pi} \phi(\omega, \omega') L_i(\mathbf{x}, \omega') d\omega}_{\text{do-sipanje } S(\mathbf{x}, \omega)} + \underbrace{\epsilon(\mathbf{x}, \omega)}_{\text{emisija}}, \quad (8)$$

prvi člen enačbe je atenuacija svetlobe z skupnim koeficientom $\sigma_t = \sigma_a + \sigma_s$, drugi pa predstavlja pozitivni prispevek do-sipanja. Dodali smo tudi člen $\epsilon(\mathbf{x}, \omega)$, ki predstavlja emisijo v snovi; tega člena v tej nalogi ne bomo upoštevali, je pa njegova obravnava relativno preprosta.



Slika 5: Odvisnost izgleda od kota osvetlitve, postavitev kot na sliki 4a. Krogla absorpcijsko-sipalnega medija $(\sigma_s, \sigma_a) = (16, 0)$.

1.2 Integralska formulacija transporta

Diferencialno enačbo sevalnega transporta (8) želimo rešiti numerično, z uporabo računalnika. To bomo dosegli z Monte Carlo integracijo, točneje z algoritmom sledenja potem (ang. *path tracing*). Monte Carlo integracija je v osnovi tehnika za vrednotenje visoko dimenzijskih integralov, zato je potrebno diferencialno enačbo prvo prevesti na integral. Takšna integralska formulacija transporta svetlobe je bila prvo formuliran za trdne površine (ne presevalne medije, ki zanimajo nas) sicer z slavno enačbo upodabljanja (ang. *rendering equation*) [5]. Sledenje potem in njegove različice predstavljajo jedro vseh tehnik za fizikalno osnovano upodabljanje in se široko uporabljajo pri produkciji filmov, iger in ostalih medijev.

V tej nalogi se osredotočamo na presevalne medije. Tu bomo reševali drugo integralno enačbo, ki jo lahko izpeljemo z integracijo enačbe sevalnega transporta (8). Tako imenovana volumetrična enačba upodabljanja (ang. *volumetric rendering equation*) izraža sevalnost v neki točki kot integral absorpcije in sipanja vzdolž žarka

$$L(\mathbf{x}, \omega) = \int_0^{t_{\text{izstop}}} T(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \left[S(\mathbf{x}', \omega) + \epsilon(\mathbf{x}') \right] dt + T(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{\text{izstop}}) L(\mathbf{x}_{\text{izstop}}, \omega), \quad (9)$$

pri čemer je t_{izstop} žarkovni parameter, pri katerem iz medija izstopimo v vakuum, faktor $T(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{\text{izstop}})$ pa je atenuacija po poti med $\mathbf{x}$ in $\mathbf{x}_{\text{izstop}} = \mathbf{x} + \omega t_{\text{izstop}}$, definirana kot

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = T(0, t) = \int_0^t \sigma_t(t') dt', \quad (10)$$

pri čemer je $\sigma_t(\mathbf{x}) = \sigma_a(\mathbf{x}) + \sigma_s(\mathbf{x})$ skupni atenuacijski koeficient absorpcije in od-sipanja.

2 Monte Carlo integracija

Integralska enačba (9) je rešljiva z uporabo Monte Carlo integracije. Če ponovimo – za splošen integral oblike

$$I = \int f(x) dx,$$

lahko skonstruiramo Monte Carlo oceno s tem, da vzorčimo in računamo primerno povprečje integranda, za vzorce iz neke porazdelitve $x \sim \text{PDF}(x)$

$$\langle I \rangle = \frac{1}{N} \sum_i \frac{f(x_i)}{\text{PDF}(x_i)} = \frac{1}{N} \sum_i g(x_i), \quad x_i \sim \text{PDF}(x), \quad (11)$$

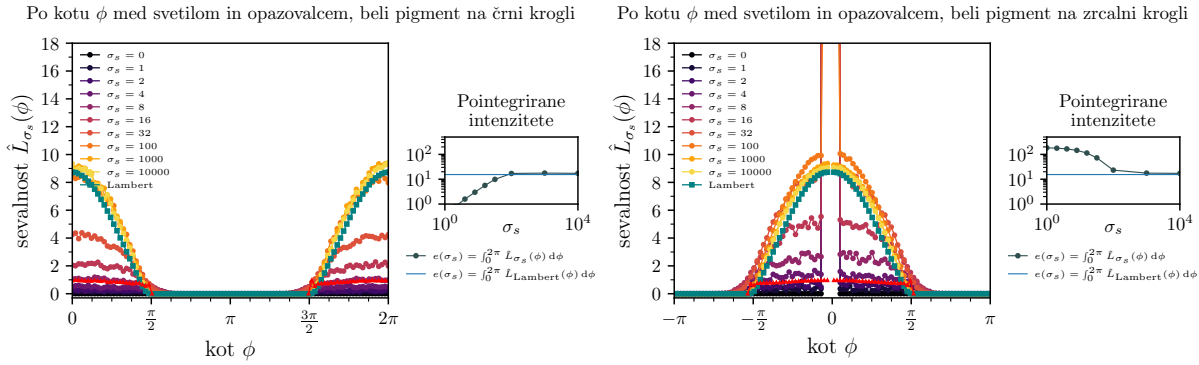
kjer je g Monte Carlo cenilka za integral I , tako da njena pričakovana vrednost $\langle I \rangle = \frac{1}{N} \sum_i g(x_i)$ konvergira proti I . Napaka takšne integracije se zmanjšuje s številom vzorcev N kot $1/\sqrt{N}$, vendar konstanta $\sqrt{\text{Var}(g)}$ močno zavisi od izbire porazdelitve vzorčenja, kot bomo videli pri uvažanju večpomembnostnega vzorčenja (razdelek 2.4).

Žarki iz kamere ali žarki iz svetila. Čeprav je morda filozofsko bolj pravilno razumeti, da svetloba izvira iz svetila, nam enačba 9 ne predpisuje, v kateri smeri moramo žarkom slediti – podaja le rekurzivno zvezo, s katero se sevalnost vzdolž takih žarkov propagira. Formalno je enako, če integral 9 začnemo vrednotiti iz smeri svetila ali iz smeri opazovalca, le vzorčiti moramo po prostoru možnih poti med njima. Ker velik del žarkov iz svetila (kako velik je odvisno od geometrije) nikoli ne doseže opazovalca, je bolj ugodno, da žarkom sledimo iz smeri, kjer sevalnost opazujemo. Takšno vzorčenje je še vedno zagotovljeno nepristransko, a tipično konvergira mnogo hitreje kot če bi žarki pot začeli na površini svetil.

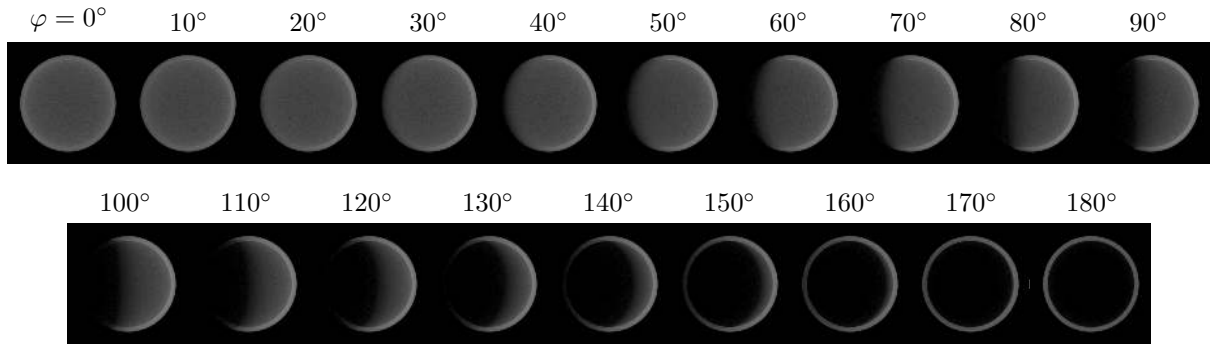
2.1 Konstrukcija cenilke

Direktno iz volumetrične enačbe upodabljanja (9) lahko zapišemo osnovno obliko cenilke. Če ocenjujemo sevalnost v točki $\mathbf{x}$ v smeri ω , bomo vzorčili žarkovni parameter $t \sim \text{PDF}(t)$ vzdolž žarka $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \omega t$ in integrand ocenili kot

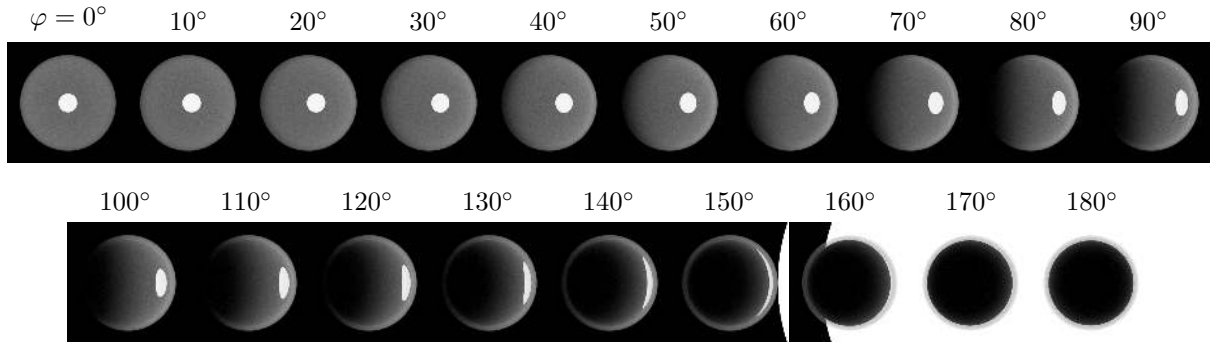
$$g_L^{(\text{poznan } S(\mathbf{x}', \omega) \text{ in } L(\mathbf{x}_{\text{izstop}}, \omega))} = \frac{T(0, t)}{\text{PDF}(t)} \cdot S(\mathbf{x}', \omega) + T(0, t_{\text{izstop}}) \cdot L(\mathbf{x}_{\text{izstop}}, \omega). \quad (12)$$



Slika 6: Kotna odvisnost sevalnosti za kroglo, znotraj katere je postavljena manjša krogla z radijem 0.9, ki pod slojem belega pigmenta vsiljuje nek robni pogoj. (Levo) Robni pogoj črne površine, kjer je notranja krogla idealni absorber, torej je sevalnost na meji z notranjo kroglo $L = 0$. Za majhne sipalne koeficiente je



Slika 7: Odvisnost izgleda od kota osvetlitve, postavitev kot na sliki 4a. Na črni krogli je nanos absorpcijsko-sipalne medija $(\sigma_s, \sigma_a) = (8, 0)$.



Slika 8: Odvisnost izgleda od kota osvetlitve, postavitev kot na sliki 4a. Na zrcalni krogli je nanos absorpcijsko-sipalnega medija $(\sigma_s, \sigma_a) = (8, 0)$.

Cenilke (12) ne moremo izvrednotiti, saj ne poznamo točne vrednosti do-sipalnega integrala $S(\mathbf{x}, \omega)$. Podoben problem imamo s tem, da ne poznamo sevalnosti $L(\mathbf{x}_{\text{izstop}}, \omega)$. Zato zapišemo Monte Carlo cenilko za do-sipalni integral, sicer kot

$$g_S^{(\text{pozn} L(\mathbf{x}', \omega))} = \frac{\sigma_s(\mathbf{x}') \phi(\mathbf{x}', \omega, \omega')}{\text{PDF}(\omega')} \cdot L(\mathbf{x}', \omega'). \quad (13)$$

kar lahko razumemo kot vzročenje integrala po sferi (7) s tem, da vzorčimo smeri dohodnih žarkov $\omega' \sim \text{PDF}(\omega')$. Prav tako, kot pri prvo zapisani cenilki (12) nismo poznali S , tokrat ne poznamo $L(\mathbf{x}', \omega)$. To razrešimo z rekurzijo, tako da cenilki g_S in g_L združimo v eno rekurzivno cenilko

$$g_L = \frac{T(0, t)}{\text{PDF}(t)} \cdot g_S(\mathbf{x}', \omega) + T(0, t_{\text{izstop}}) \cdot g_L(\mathbf{x}_{\text{izstop}}, \omega), \quad g_S = \frac{\sigma_s(\mathbf{x}') \phi(\mathbf{x}', \omega, \omega')}{\text{PDF}(\omega')} \cdot g_L(\mathbf{x}', \omega'), \quad (14)$$

pri čemer je rekurzivnost v tem, da smo $L(\mathbf{x}_{\text{izstop}}, \omega)$ iz cenilke (12) ocenili na enak način kot začetni $L(\mathbf{x}, \omega)$, le z $\mathbf{x}' \mapsto \mathbf{x}_{\text{izstop}}$. Prav tako g_S spet vsebuje cenilko g_L , le z $\omega \mapsto \omega'$.

2.2 Vzročenje medija

Takšna rekurzivna cenilka (14) je pripravna za implementacijo na računalniku. Zavoljo učinkovitosti jo je relativno preprosto prevesti na iteracijo, kjer akumuliramo faktor prepustnosti in se izognemo dejanski rekurziji. Vse kar je potrebno razrešiti, je učinkovito žrebanje vzorcev iz zelenih porazdelitev. V homogenem mediju, ki ga bomo obravnavali večino te naloge, je inverzom CDF funkcije preprosto vzorčiti žarkovne parametre t iz porazdelitve

$$\text{PDF}(t) = \sigma_t \cdot e^{-\sigma_t t}, \quad \text{homogen medij.} \quad (15)$$

Pomaga nam dejstvo, da je ta porazdelitev sorazmerna s prepustnostjo $T(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{\text{izstop}}) = e^{-\sigma_t t}$, kar je povsem naravno pomembnostno vzorčenje; zagotovi, da je cenilka bolj konstantna in zmanjša varianco. Pri vzorčenju iz porazdelitve (15) se cenilka še dodatno poenostavi kot

$$g_L = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_t(\mathbf{x}')} \cdot g_S(\mathbf{x}', \omega) & t < t_{\text{izstop}}, \text{ žarek sipan} \\ T(0, t_{\text{izstop}}) \cdot g_L(\mathbf{x}_{\text{izstop}}, \omega) & \text{žarek pobegne iz medija} \end{cases} \quad (16)$$

Poleg žarkovnih parametrov t potrebujemo vzorčiti še smeri ω' za vrednotenje cenilke do-sipalnega integrala $S(\mathbf{x}, \omega)$. Če je medij izotropen, je fazna funkcija $\phi(\omega) = \frac{1}{4\pi}$ zopet lahko z metodo inverza CDF vzorčimo naključne smeri na sferi $\omega' \sim \frac{1}{4\pi}$.

2.3 Implementacija

Algoritem sledenja potem sem implementiral v C programskem jeziku. Zanimiv tehničen problem je predstavljalo učinkovito generiranje naključnih števil. Funkcija `rand()`, ki je dostopna na UNIX sistemih, ima namreč neko deljeno stanje, ki znatno upočasni program, izvajan v več nitih (glej sliko 9). Kot rešitev tega sem uporabil generator PCG32, opisan v [10], z `_Thread_local` stanjem generatorja.

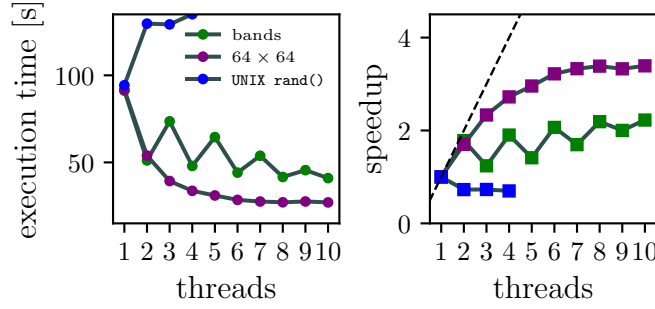
2.4 Več-pomembnostno vzorčenje

Kot vidimo na sliki 2 spodaj, je konvergenca za sliko absorpcijsko-sipalnega medija zelo počasna, konstanta $\sqrt{\text{Var}(g)}$ je tako velika, da potrebujemo vsaj $N = 1000$ oz. več vzorcev na piksel (in na posamezen spektralni kanal) da sploh vidimo prepoznavno obliko krogle. Problem je v tem, da je naše svetilo relativno majhno ($r = 1/10$, na oddaljenosti $R = 10$) in da ga velika večina žarkov ne doseže. Ta problem bomo razrešili z uporabo več-pomembnostnega vzorčenja (ang. *multiple-importance sampling* oz. MIS), ki ga je za sledenje potem prvi izrazil Veach v svoji doktorski disertaciji [12].

Osnovna ideja pomembnostnega vzorčenja je slednja. Namesto, da žarke vzorčimo izotropno v vse smeri po $\omega' \sim \text{PDF}_{\text{fazna}}(\omega')$, kot to narekuje naša izotropna fazna funkcija $\phi(\mathbf{x}, \omega, \omega') = \frac{1}{4\pi}^5$, bomo poleg tega vzorčili še iz ene porazdelitve $\text{PDF}_{\text{svetil}}$, ki predstavlja sevalnost vseh svetil v izbrani geometriji. Na vsakem koraku vrednotenja cenilke g_S torej vzorčimo dve smeri žarka

$$\omega'_\ell \sim \text{PDF}_{\text{svetil}}(\omega'), \quad \omega'_\Phi \sim \text{PDF}_{\text{fazna}}(\omega'),$$

⁵Fazna funkcija $\phi(\mathbf{x}, \omega, \omega')$ je zavoljo ohranitve energije v sipalnih procesih normirana kot $\int_{4\pi} \phi(\mathbf{x}, \omega, \omega') d\omega'$, torej že predstavlja verjetnostno porazdelitev za vzorčenje, najbolj primerna za $\text{PDF}_{\text{fazna}}(\omega') = \phi(\mathbf{x}, \omega, \omega')$.



Slika 9: Hitrost izvajanja z večanjem števila niti. PCG generator ne kaže iste upočasnitve kot UNIX `rand()`. Z zeleno je narisana način deljenja dela, kjer piksele med niti razdelimo deterministično po enem linearnem indeksu. Z vijolično piksele pred tem premešamo, da zagotovimo "pošteno" in tako bolj učinkovito delitev dela.

nato pa oba vzorca združimo v novo izboljšano več-pomembnostno (MIS) cenilko

$$g_S^{\text{MIS}} = w_\ell^{\text{MIS}}(\omega'_\ell) \cdot \frac{\Phi(x', \omega, \omega'_\ell)}{\text{PDF}_{\text{svetil}}(\omega'_\ell)} \cdot L(\mathbf{x}', \omega'_\ell) + w_\Phi^{\text{MIS}}(\omega'_\Phi) \cdot \frac{\Phi(x', \omega, \omega'_\Phi)}{\text{PDF}_{\text{fazna}}(\omega'_\Phi)} \cdot L(\mathbf{x}', \omega'_\Phi), \quad (17)$$

pri čemer sta w_ℓ^{MIS} in w_Φ^{MIS} primerne uteži, t. i. *balance heuristic* [12], definirane kot

$$w_\ell^{\text{MIS}}(\omega) = \frac{\text{PDF}_{\text{svetil}}(\omega)}{\text{PDF}_{\text{svetil}}(\omega) + \text{PDF}_{\text{fazna}}(\omega)}, \quad (18)$$

$$w_\Phi^{\text{MIS}}(\omega) = \frac{\text{PDF}_{\text{fazna}}(\omega)}{\text{PDF}_{\text{fazna}}(\omega) + \text{PDF}_{\text{svetil}}(\omega)}. \quad (19)$$

Iz definicije uteži 19 vidimo, da je prispevek vzorca iz vsake izmed porazdelitev obtežen z relativno verjetnostjo, da je bil ta vzorec izžreban. Ko je vzorčena smer pomembna za prispevek v smeri svetil, je torej večji prispevek prvega člena, če pa v izbrano smer ni svetil, je prispevek prvega člena enak 0.

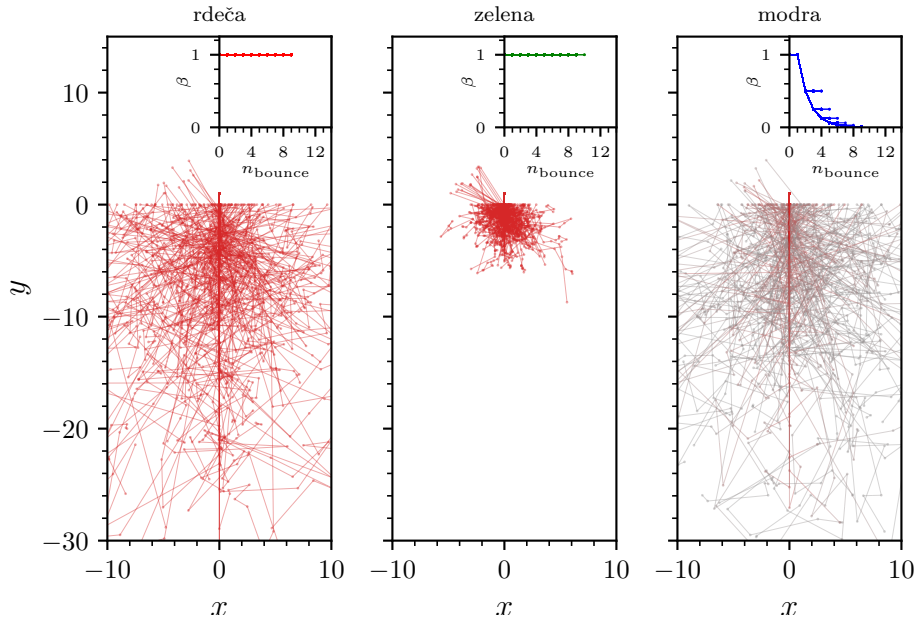
Implementacija več-pomembnostnega vzročenja znatno pohitri konvergenco. Sam trend upadanja variance je še vedno $\frac{1}{\sqrt{N}}$, a konstantni faktor je mnogo manjši, kot vidimo s primerjavo integracije z in brez uporabe več-pomembnostnega vzročenja (MIS) na slikah 3 z in 2.

3 Izgled in zanimive funkcijske odvisnosti

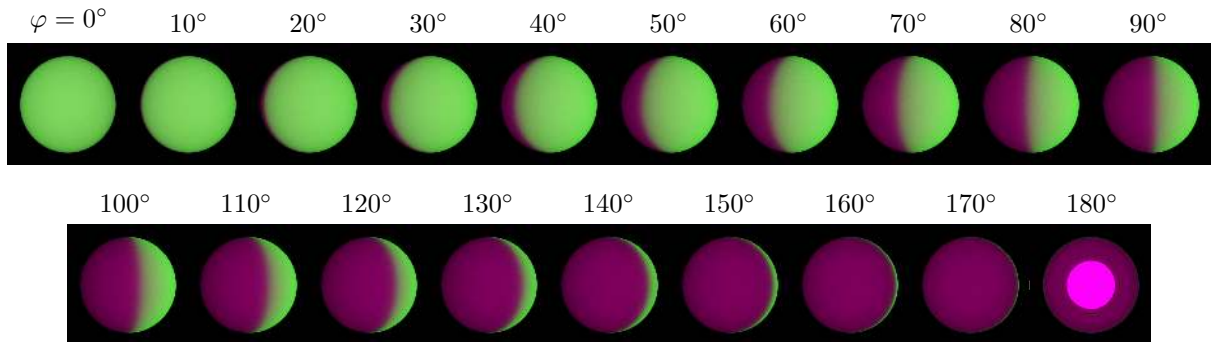
3.1 Kotna odvisnost sevalnosti

V preprosti geometriji si bomo pogledali, kako absorpcijsko-sipalni medij vpliva na kotno odvisnost prepuščene in odbite svetlobe. V izhodišče postavimo enotsko kroglo belega pigmenta, t. j. materiala, ki svetlobo le sipa brez absorpcijske. Nato pod kotom ϕ , kot je to prikazano na sliki 4a, kroglo osvetlimo z majhnim kroglastim svetilom. Izračunana kotna odvisnosti sevalnosti za polno kroglo belega pigmenta je narisana na sliki 4b. Glede na vrednosti sipalnega koeficienta opazimo, da je svetilo pri večjih vrednostih σ_s manj vidno skozi kroglo (na sliki 4b desno vidimo po kotu integrirano intenziteto, ki pada z σ_s). Večina sipane sevalnosti zapusti kroglo v smereh stran od opazovalca, a nek delež se prerazporedi v mehek odboj na strani svetila. Kot smo že videli na sliki 10, tak odboj sovпада z medijem, kjer je povprečna prosta pot kratka – v takem primeru je mnogo bolj verjetno, da bo svetloba medij zapustila na točki, ki je blizu točke, kjer je v medij vstopila. Značilna oblika za $\sigma_s \rightarrow \infty$ je vedno bolj podobna Lambertovemu odboju, ki je sorazmeren z $\cos \phi$. Torej lahko razumemo, da se zadostno gost sipalni medij za svetlobo obnaša kot "trd" objekt z difuznim odbojem.

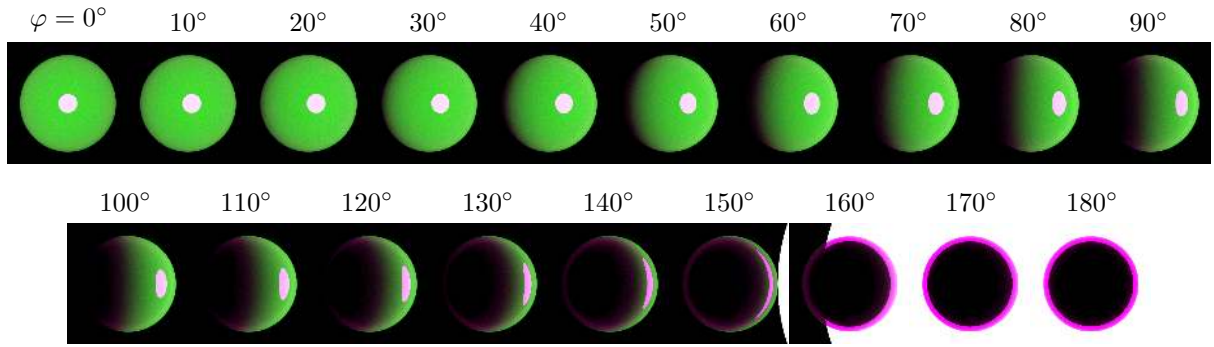
Zanimivo je pogledati vpliv pigmenta na sipanje svetlobe v primeru, da beli pigment nanašamo na neko površino, ki že ima svoje optične lastnosti. Na sliki 6 beli pigment nanesemo na črno kroglo, t. j. na idealni absorber svetlobe, ki ima na površini sevalnost $L = 0$. S tem postaja črni objekt vedno bolj odbojen, z $\sigma_s \rightarrow \infty$ se približuje Lambertovemu profilu difuznega odboja. Drug zanimiv robni pogoj vidimo na sliki 6 desno, kjer je beli pigment nanesen na zrcalno površino, kjer je odboj singularen po kotu (kotna porazdelitev odbite svetlobe je Diracova delta funkcija okoli preko normale prezrcaljenega



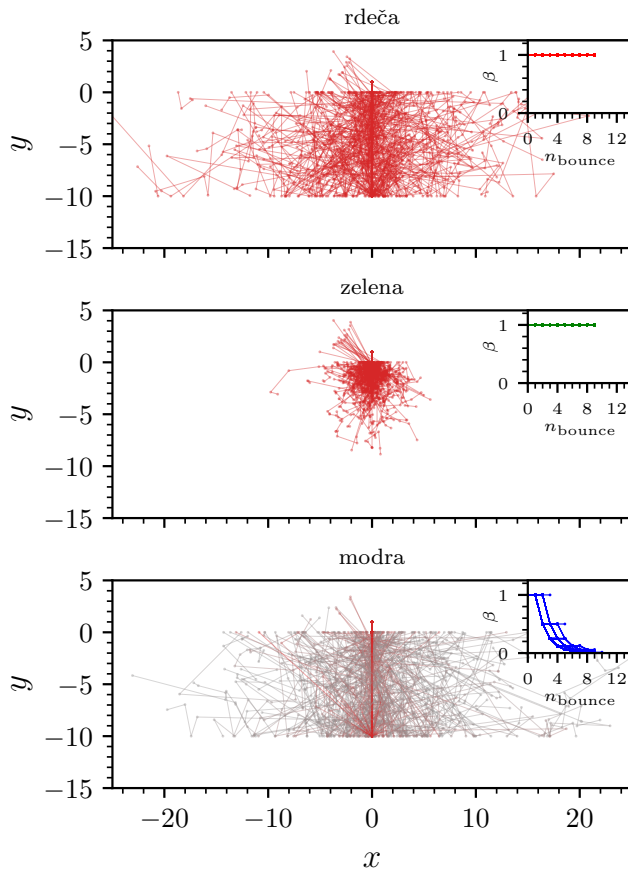
Slika 10: Sipanje 256 vzorcev (žarkov) za tri monokromatske absorpcijsko-sipalne medije oz. tri komponente več-kromatskega (RGB) medija. Žarki začnejo pot pri $(0, 1, 0)$, obrnjenem naravnost navzdol, v smer $(0, -1, 0)$. Po vstopu v medij se svetloba sipa in absorbira različno, glede na koeficienta σ_a, σ_s . Z nasičenjem barve in desno zgoraj v manjših sličicah je prikazana sevalnost, ki jo še nosi ta žarek. (Levo) Šibko sipalni medij brez absorpcije $(\sigma_s, \sigma_a) = (1, 0)$. Vidimo, da se je prosta pot relativno dolga, sevalnost pa se vseskozi ohranja. (Sredinsko) Močno sipalni medij brez absorpcije $(\sigma_s, \sigma_a) = (5, 0)$. Prosta pot je v tem meniju približno 5-krat krajša, žarki le plitvo vstopajo v površino medija. (Desno) Šibko sipalni medij z absorpcijo $(\sigma_s, \sigma_a) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Ker je skupni atenuacijski koeficient $\sigma_t = \sigma_a + \sigma_s$ enak kot v mediju brez absorpcije (levo), je povprečna pot v mediju enaka (žarki postajajo bolj sivi, glej tudi β desno zgoraj), a zaradi absorpcije sevalnost vzdolž poti žarkov eksponentno upada.



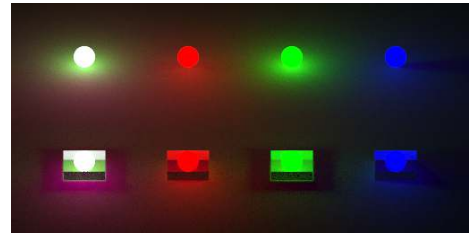
Slika 11: Krogla absorpcijsko-sipalnega medija z tremi (RGB) komponentami koeficientov $\sigma_s = (1, 100, \frac{1}{2})$ in $\sigma_a = (0, 0, \frac{1}{2})$. Kvalitativno so obnašanja treh spektralnih komponent podobna mediju na sliki 10, a močno sipanje zelene komponente je še bolj poudarjeno. Slike so posnete pod različnimi koti opazovalec-svetilo (skica 4a). Vidimo, da je odboj zelen, prepuščena svetloba pa je pretežno rdeča, z nekoliko modre komponente (torej rdeče-vijolična).



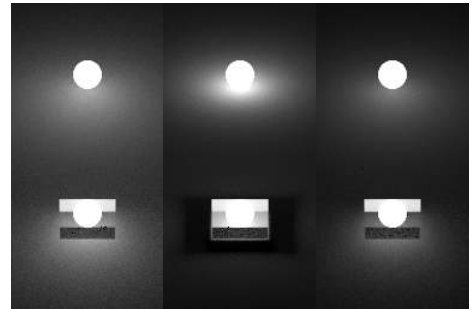
Slika 12: Nanos absorpcijsko-sipalnega medija na zrcalni krogli. Medij je enak kot na sliki 11, svetilo pa je 8-krat večje.



(a)



(b)



(c)

Slika 13: (a) Poti 256 žarkov za enak tro-kromatski medij kot na sliki 10, z dodatkom tega, da imamo pod površino medija dodane še robni pogoj Lambertovega odboja. (b) Tro-kromatski medij iz slike (a) v postavitvi z luči rdeče, zelene in modre barve. Vidimo, da rdeča komponenta globoko prodre v pol-prostor pod kroglo, medtem ko je širitev zelena komponenta mnogo bolj omejeno, večji del se je odbije. Še bolj jasno se to vidi, ko dodamo škatle, ki zamejujejo posamezna svetila. Zelena komponenta meče izrazito senco, rdeča pa brez težav prodre skozi medij pod škatlo. Modra komponenta podobno kot rdeča prodira globoko v medij, a se pri tem tudi znatno absorbira, torej je soj manj svetel. (c) Enako kot slika (b), le v sivih tonih ločene rdeče, zelene in modre barve za lažjo primerjavo.

vpadnega kota). Škatlast vrh odboja je namesto pri kotu $\phi = \pi$ premaknjen na kot $\phi = 0$, torej se zrcalni in mehki (Lambertov) odboj prekrivata. Tak kombiniran odboj je značilen za mnogo objektov v resničnem svetu, kot bomo videli v razdelku 4. Poleg presekov v ravnini $\theta = \pi/2$ si na slikah 5, 7 in 8 pogledamo še dejanske izgled krogel za polno kroglo in nanose na črno oz. zrcalno kroglo.

3.2 Nanosi monokromatskega pigmenta

Pogledamo si lahko tudi kako absorpcijsko-sipalna koeficienta vplivata na izgled odbite svetlobe. Najbolj preprosto lahko to preverimo v geometriji ravne plasti neskončne debeline (kot na sliki 10) v katero pošiljamo žarke. Odbita sevalnost v odvisnosti od razmerja $r = \frac{\sigma_s}{\sigma_a}$ je narisana na sliki 14 za kroglo absorpcijsko-sipalnega materiala in na sliki 15 za nanos na črni ter zrcalni podlagi. Razmerje r je relevantno, ker nastopa kot edini parameter v Kubelka-Munk teoriji [6], kjer je odboj od neskončno debelega sloja absorpcijsko-sipalnega materiala podan kot

$$R_{\infty}^{(KM)} = 1 + r - \sqrt{r^2 + 2r}, \quad r = \frac{\sigma_a}{\sigma_s}. \quad (20)$$

Na sliki 14 desno in na sliki 16 vidimo vpliv razmerja r še v krogelni geometriji, kjer je simetrija na skaliranje zlomljena.

3.3 Simulacijo več-kromatske svetlobe

Zaenkrat smo simulirali le transport za eno spektralno komponento svetlobe. Posamezne spektralne komponente pa se širijo povsem neodvisno, zato je razširitev na več-kromatsko svetlobo zelo preprosta. Preden se posvetimo psihofiziološkim odzivnim funkcijam in izmerjenim absorpcijsko-sipalnim spektrom si pogledajmo prototipni material, ki rdečo svetlobo šibko sipa, zeleno močno sipa, modro pa sipa in absorbira. Na sliki 10 vidimo poti žarkov po vstopu v medij, kjer vidimo, kako se širijo različne spektralne komponente. Na sliki 13a levo dodamo pod površino medija še trdno površino z Lambertovim odbojem. Na slikah 13a desno in 11 in 12 pa izgled polne krogel in nanosa na zrcalno kroglo po različnih kotih osvetlitve.

4 Izgled preko izmerjenih absorpcijsko-sipalnih spektrov

4.1 Prehod iz spektra na barvo: XYZ in sRGB barvna prostora

Da bomo prikazali izgled sevalno-absorpcijskih materialov želimo spekter odbite svetlobe preslikati v barve. Barvni prostor je standard, osnovan na psihofizičnih meritvah, kjer je opažena svetloba opisana s tristimulusnimi vrednostmi

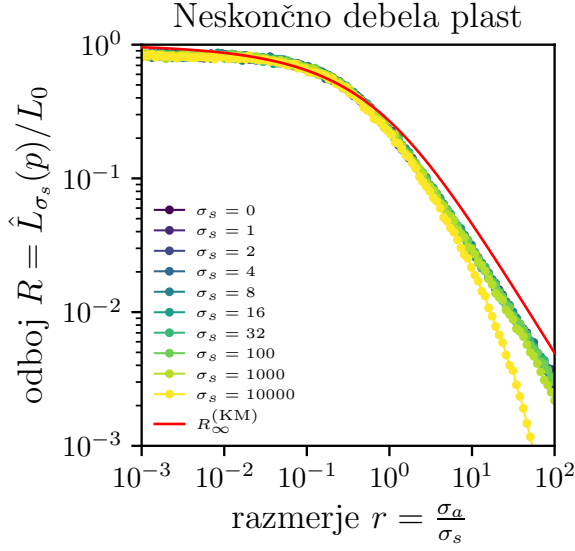
$$X = \int L(\lambda) \cdot \bar{X}(\lambda) d\lambda, \quad Y = \int L(\lambda) \cdot \bar{Y}(\lambda) d\lambda, \quad Z = \int L(\lambda) \cdot \bar{Z}(\lambda) d\lambda. \quad (21)$$

Odzivne funkcije $\bar{X}, \bar{Y}$ in $\bar{Z}$ izhajajo iz psihofizioloških eksperimentov [13, 3], kjer so opazovalci gledali razdeljeno polje. Na eni polovici je bil monokromatski dražljaj, na drugi pa prilagodljiva mešanica treh osnovnih barv. Z uravnavanjem intenzitet so dosegli metamerijo, t. j. enak izgled barv, ko so tristimulusne vrednosti obeh spektrov enake. Odzivne funkcije $\bar{X}(\lambda), \bar{Y}(\lambda)$ in $\bar{Z}(\lambda)$ za CIE1931 barvni prostor [4] vidimo na sliki 19 levo zgoraj.

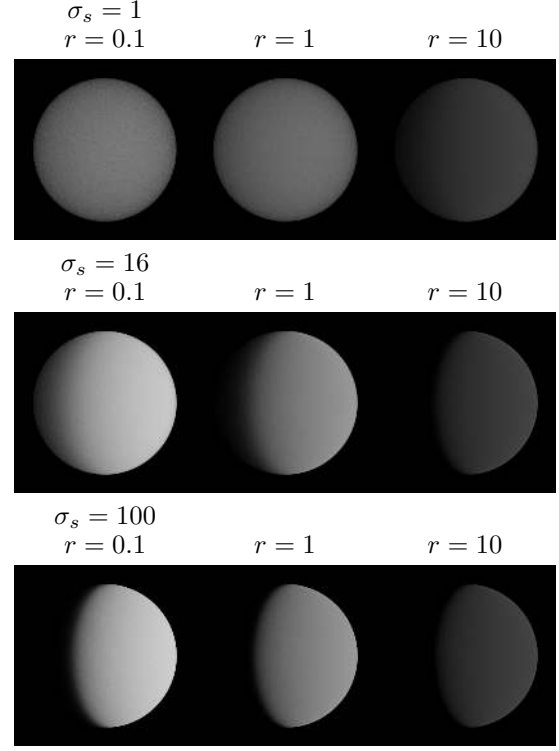
Tako dobljene funkcije so podlaga za transformacijo v druge prostore. Ker bomo barve prikazovali na računalniškem zaslonu, moramo barvo preslikati v sRGB prostor. V dokumentu [11] so podane vrednosti te linearne preslikave iz XYZ CIE1931 prostora v sRGB prostor kot

$$\begin{pmatrix} R_{sRGB} \\ G_{sRGB} \\ B_{sRGB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2410 & -1.5374 & -0.4986 \\ -0.9692 & 1.8760 & 0.0416 \\ 0.0556 & -0.2040 & 1.0570 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Kot odraz omejene izbire primarnih barv (tehnološka omejitev) odzivne funkcije $\bar{R}, \bar{G}$ in $\bar{B}$ zavzemajo tudi negativne vrednosti (glej sliko 19 levo spodaj). Eksperimentalno to predstavlja to, da so ustrezno osnovno barvo dodali polju z dražljajem namesto prilagodljivemu polju. Na napravah, ki prikazujejo barve v sRGB prostoru (siv trikotnik na sliki 19 desno) pa to pomeni, da so takšnih barv z negativnimi vrednostmi odziva ni mogoče prikazati.

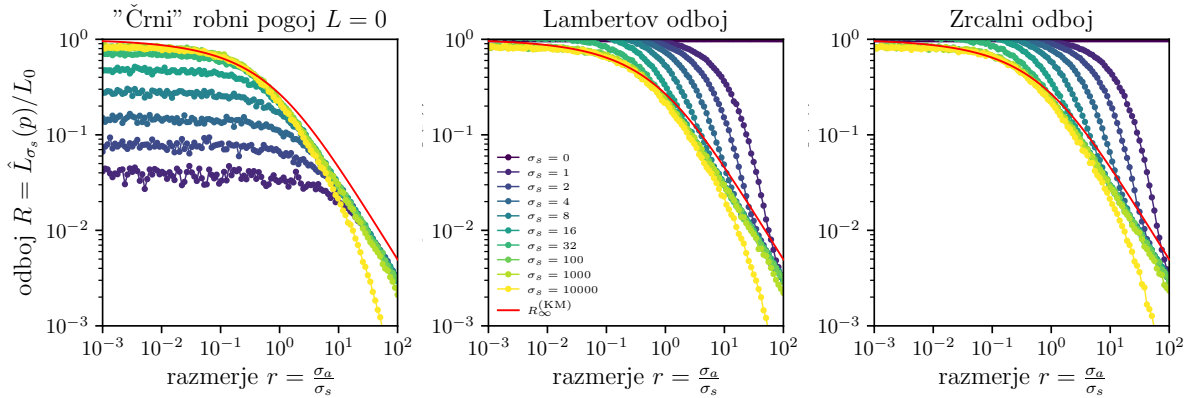


(a)

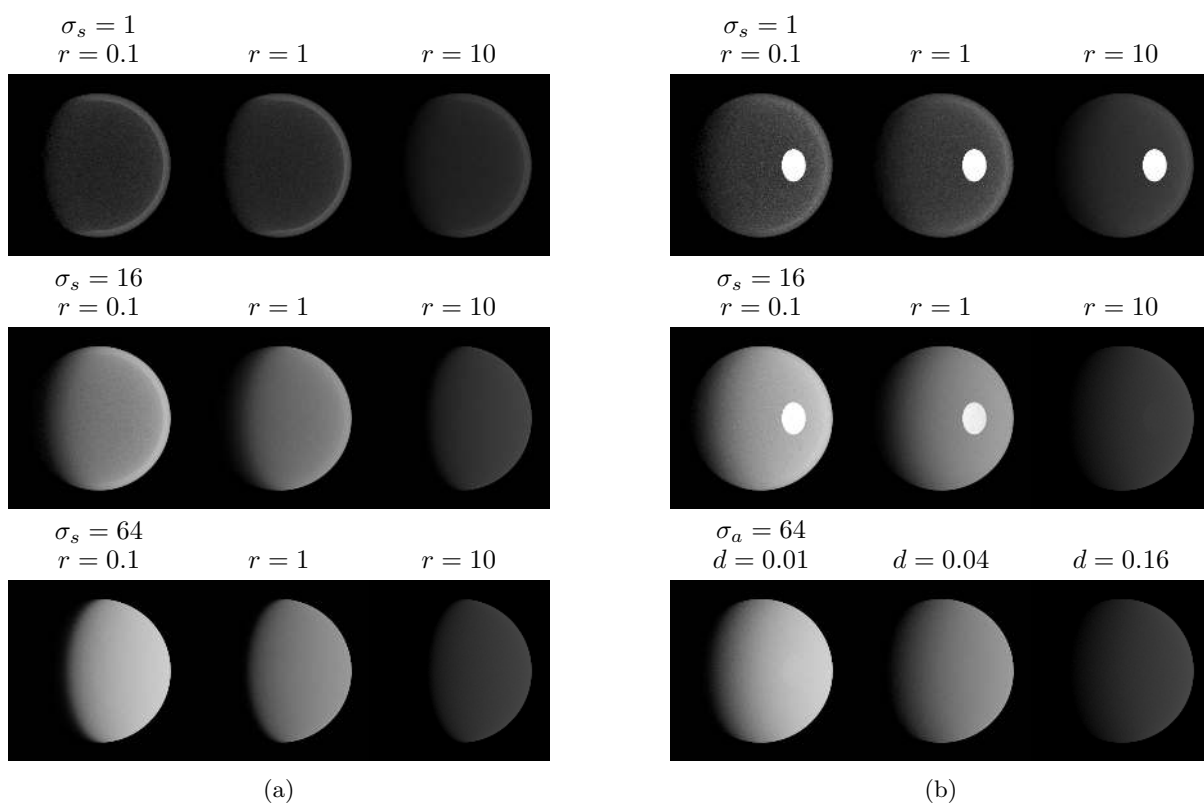


(b)

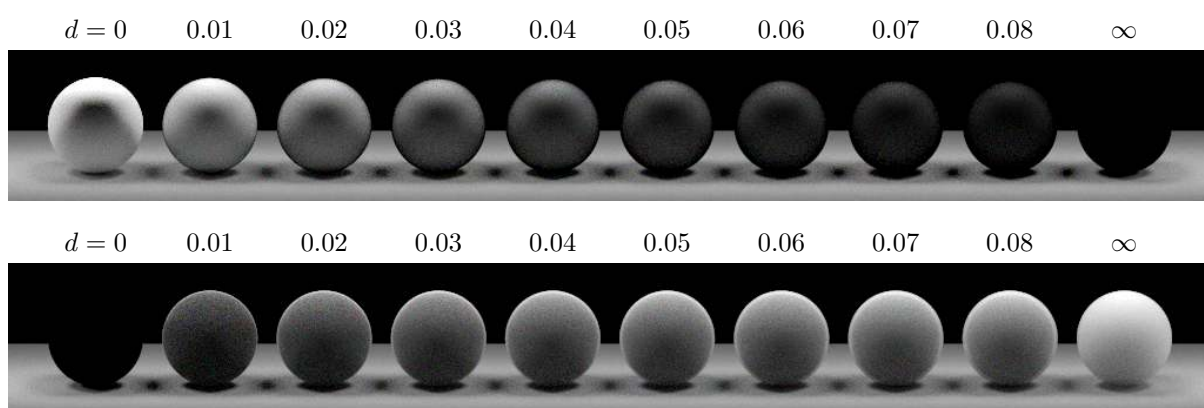
Slika 14: (a) Vpliv razmerja koeficientov $r = \frac{\sigma_a}{\sigma_s}$ na odboj od neskončno debele plasti R_∞ . Vidimo, da je odboj skoraj v celoti odvisen od razmerja koeficientov, ne od njunih absolutnih vrednosti, kar se lepo ujema z Kubelka-Munk analitičnim izrazom $R_\infty^{(KM)}$. Odstopanje je nekoliko večje za močnejše absorbirajoče medije, kjer začnejo Monte Carlo izračuni odstopati od Kubelka-Munk izraza. (b) Vpliv sipalnega koeficienta σ_s in razmerja r na izgled krogle absorpcijsko-sipalnega materiala.



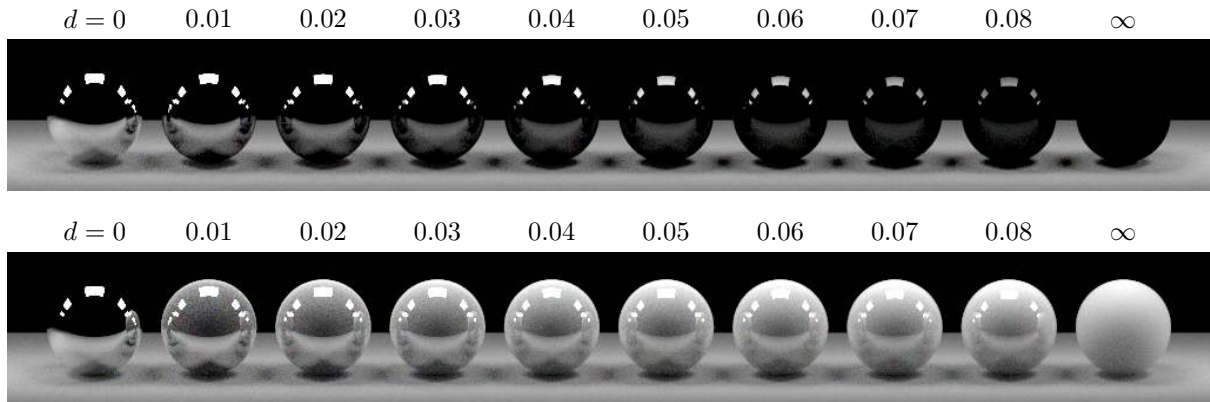
Slika 15: Vpliv razmerja koeficientov $r = \frac{\sigma_a}{\sigma_s}$ na odboj od R od plasti pigmenta, pod površino katerega zahtevamo nek robni pogoj. Za razliko od neskončne plasti na sliki 14, je tu odboj R odvisen tudi od absolutnih vrednosti, ne le od razmerja absorpcijskega in sipalnega koeficienta. Zlomljena je namreč simetrija problema na skaliranje – s tem, da smo $\Delta y = \frac{1}{5}$ pod površino medija vstavili ravnino z robnim pogojem. Če sta absolutni vrednosti koeficientov dovolj veliki (rumena), je ravnina z robnim pogojem mnogo povprečnih prostih poti od vstopa v medij; tedaj robni pogoji ne vplivajo na širjenje svetlobe.



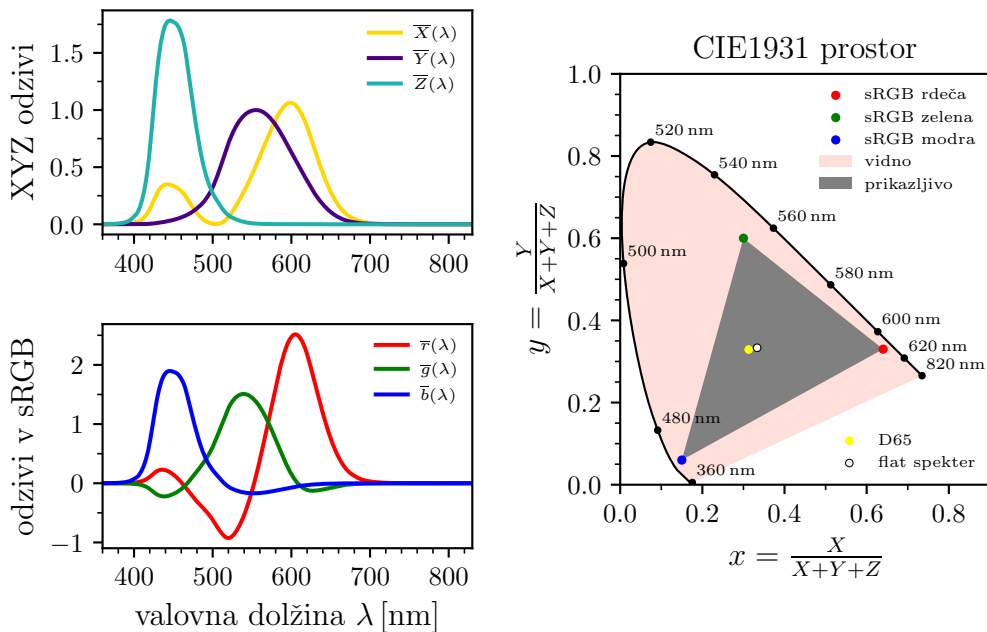
Slika 16: Vpliv absorpcijskega koeficienta σ_a in razmerja $r = \frac{\sigma_a}{\sigma_s}$ na izgled krogle, če je pigment nanesen na (a) črno kroglo, (b) kroglo z zrcalnim odbojem.



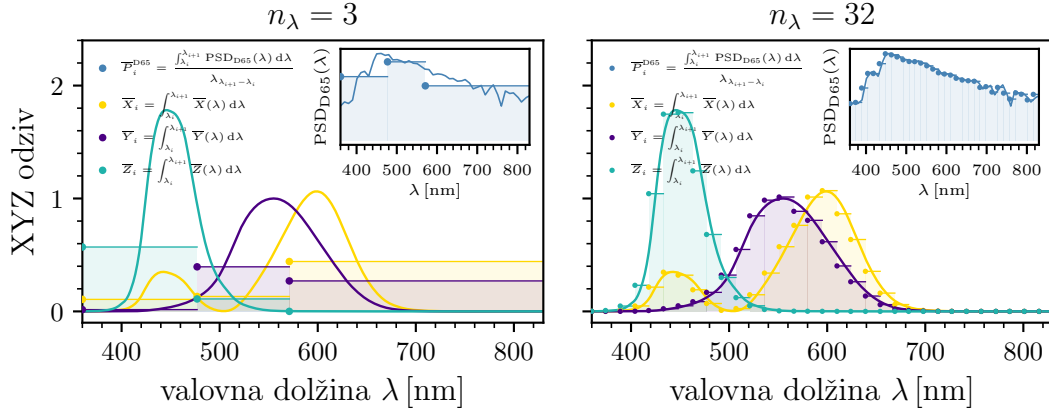
Slika 17: Vpliv debeline sloja na izgled krogel, če je črni pigment z $(\sigma_s, \sigma_a) = (0, 50)$ nanesen na belo kroglo z Lambertovim odbojem (zgornja vrstica) oz. beli pigment z $(\sigma_s, \sigma_a) = (10, 0)$ nanesen na črno kroglo (spodnja vrstica).



Slika 18: Vpliv debeline sloja na izgled krogel, če je črni pigment z $(\sigma_s, \sigma_a) = (0, 50)$ (zgornja vrstica) oz. beli pigment z $(\sigma_s, \sigma_a) = (10, 0)$ (spodnja vrstica) nanosen na kroglo z zrcalno površino.



Slika 19: Odzivne funkcije CIE1931 barvnega prostora. (Levo zgoraj) Odzivne funkcije $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$, neposredno iz [4] podatkov. (Levo spodaj) Odzivne funkcije, izražene v RGB prostoru preko preslikave (22). Najbolj izrazito je, da so odzivi pri določenih valovnih dolžinah negativni. Takšne barve niso prikazljive na sRGB zaslonih. (Desno) CIE1931 barvni prostor vseh vidnih barv, z normaliziranimi x in y koordinatama, tako da je $z = 1 - x - y$. Monokromatske (čiste) barve so prikazane na polni črni črti z oznakami valovnih dolžin. Na sRGB zaslonih so prikazljive le barve znotraj sivga trikotnika, kot konveksne kombinacije sRGB rdeče, zelene in modre točke. Barv izven tega trikotnika na tipičnem zaslonu ne moremo prikazati.



Slika 20: Odzivne funkcije $\bar{X}(\lambda)$, $\bar{Y}(\lambda)$ in $\bar{Z}(\lambda)$ za izbrano diskretizacijo (meje *bin*-ov) spektra na $n_\lambda = 3$ in $n_\lambda = 32$ spektralnih komponent. Desno zgoraj v manjši sličici vidimo tudi standardno osvetlitev D65, s katero je potrebno odzivne funkcije pomnožiti (tega nismo omenili v razdelku 4.1, a je še en pomemben korak v tem, da odzivne funkcije podane v [4] lahko uporabimo).

nelinearnost človeškega vida in gamma krivulje. poleg tristimulusne definicije barvnega prostora moramo za natančno reprodukcijo barve upoštevati tudi nelinearnost človeškega vida. odziv človeškega očesa na sevalnost ni linearen, temveč ga približno opisuje potenčni zakon $i_{\text{odziv}} \propto l^{1/\gamma}$, pri čemer je $\gamma \approx 2.2$. takšen odziv je iz tehničnih in zgodovinskih razlogov⁶ vgrajen tudi v definicijo srgb barvnega prostora. namesto shranjevanja l , so v vrednostih srgb pikselov shranjene vrednosti odzivov $i_{\text{odziv}} \in [0, 1]$. če želimo ustrezno prikazati izračunane sevalnosti, jih moramo pred zapisom v sliko enkodirati kot $i_{\text{odziv}} \propto l^{1/\gamma}$ in zapisati vrednost i_{odziv} . le tako bo sevalnost, ki bo prikazana na računalniškem zaslonu, dejansko $\propto l$.

Stisk vrednosti (tonemapping). Omenili smo že nelinearno gamma krivuljo, s katero vrednosti pikselov shranjujemo za pravilno reprodukcijo. A fizikalna sevalnost L , ki jo izračunamo z Monte Carlo integracijo, je količina v intervalu $[0, \infty)$. Za prikaz na računalniškem zaslonu pa so sRGB vrednosti možne le na intervalu $[0, 1]$. Potrebujemo torej preslikavo $[0, \infty) \mapsto [0, 1]$. Najpreprosteje je vrednosti preprosto porezati, a tako izgubimo informacije, ki smo jo trudoma izračunali. Alternativno bi vrednosti lahko reskalirali glede na maksimalno vrednost v sliki. To je prav tako nesprejemljivo, saj s tem večinski del slike postane povsem preveč temen. Primerna in pogosta preslikava, ki jo bomo uporabili za slike, izračunane v tej nalogi, bomo uporabili Reinhartov stisk

$$L_{\text{st}} = L \cdot \frac{1 + L/B^2}{L + 1}, \quad (\text{Reinhartov stisk}), \quad (23)$$

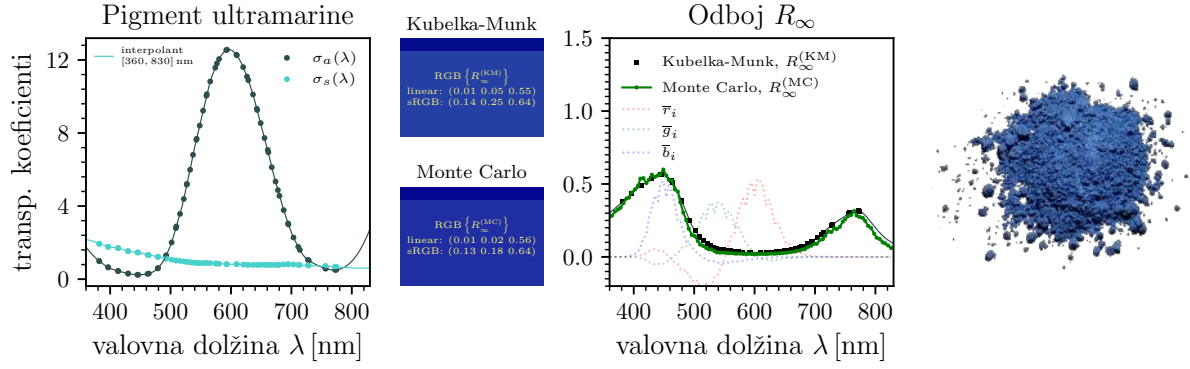
pri čemer je B parameter s katerim nadziramo moč tega stiska. Za $B \mapsto \infty$ bodo preslikane vrednosti zagotovljene v $[0, 1]$, za manjše B pa bodo nekatere vrednosti še vedno $L_{\text{st}} > 1$, kar preprosto porežemo. Parameter B izberemo glede na osvetlitev, v tej nalogi je stalno $B = 3$. Stisk in porez na $[0, 1]$ sta izvedena pred gamma preslikavo, saj gamma preslikava zahteva $L \in [0, 1]$.

4.2 Izmerjeni spektri pigmentov

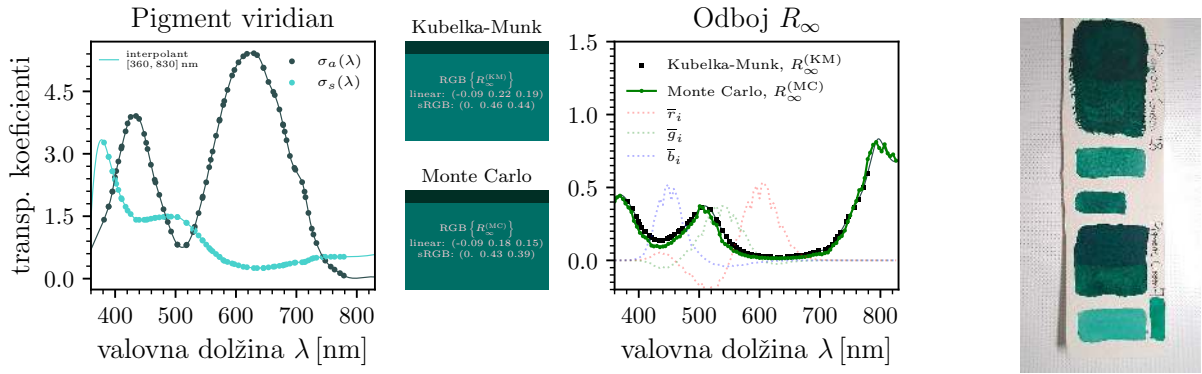
Spektri so bili izbrani na podlagi meritev absorpcijskih in sipalnih koeficientov [7] za ultramarine moder, viridian zelen ter okra rdeč oz. rjav pigment. Meritve so bile iz slik v članku ekstrahirane z uporabo Engauge programa. Ker smo jih želeli uporabiti v kombinaciji z odzivnimi funkcijami 19 so bile meritve z uporabo zlepk reinterpolirane na interval $[360 \text{ nm}, 830 \text{ nm}]$, po razmakih 1 nm. Interpolacija ob robih intervala predstavlja bolj ali manj ugibanje, a na končni rezultat to ne vpliva, saj so odzivne funkcije za $\lambda < 380 \text{ nm}$ in $\lambda > 700 \text{ nm}$ zelo majhne.

Na podlagi absorpcijskega in sipalnega spektra $\sigma_a(\lambda)$ in $\sigma_s(\lambda)$ lahko poračunamo odbojni spekter od neskončno debele ravnine pigmenta $R_\infty(\lambda)$. Na slikah 21, 22 in 23 primerjavo z Monte Carlo izračunom

⁶tehnični razlog je, da je tako natančnost diskretizacije intervala $[0, 1]$ na 8 bitov boljše izkoriščena. zgodovinski razlog je v tem, da so crt monitorji na katodne cevi imeli napetostni odziv, ki je bil posrečeno (skoraj) inverz omenjenega potenčnega zakona, t. j. $i_{\text{crt}} \propto v_{\text{crt}}^\gamma$, s potenca posrečeno blizu tiste za odziv človeškega očesa, $\gamma_{\text{crt}} \approx 2.5$.



Slika 21: Absorpcijsko-sipalni spekter ultramarine pigmenta iz [7] in izračunan odbojni spekter za neskončno debelo plast takšnega pigmenta R_∞ . (Levo) Izmerjen spekter in interpolanta. Spekter je reskaliran tako, da je $\int \sigma_s(\lambda) d\lambda = 1$, a razmerje med σ_a in σ_s je ohranjeno. (Desno) Odboj od neskončno debele plasti pigmenta R_∞ . Z zeleno je narisano Monte Carlo izračun, ki se precej lepo ujema z analitično Kubelka-Munk napovedjo. (Med grafoma) Rekonstrukcija barve iz spektrov odboja $R_\infty(\lambda)$. (Skrajno desno) Dejanski primer ultramarine pigmenta (vir slike: Wikipedia).



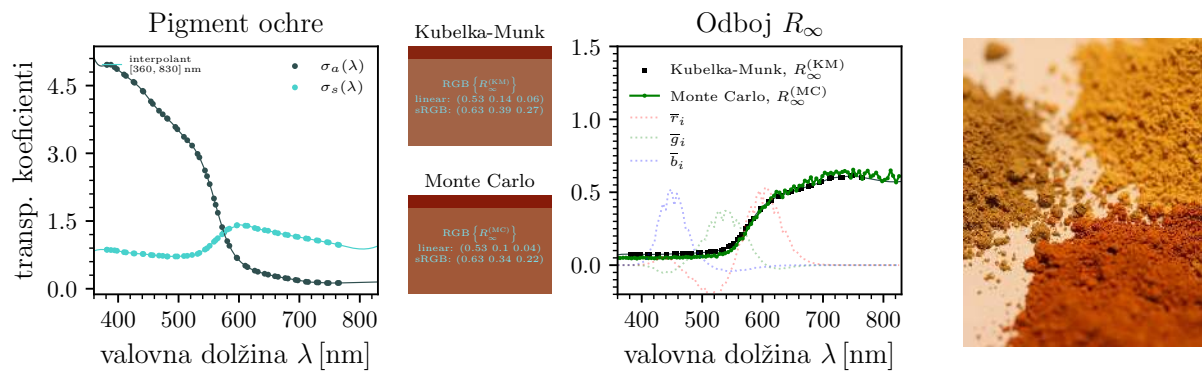
Slika 22: Absorpcijsko-sipalni spekter viridian pigmenta iz [7] in odbojni spekter za neskončno debelo plast takšnega pigmenta R_∞ . (Levo) Izmerjen in interpolanta. (Desno) Odboj od neskončno debele plasti pigmenta R_∞ , Monte Carlo izračun z zeleno se lepo ujema z analitično Kubelka-Munk napovedjo. (Skrajno desno) Dejanski primer sintetičnega viridian pigmenta (vir slike: Wikipedia).

spektra $R_\infty^{(MC)}(\lambda)$ poračunamo tudi Kubelka-Munk analitični približek po izrazu (20). Vidimo, da sta obliki spektrov zelo podobni, kar je pričakovano, saj Kubelka-Munk približek primeru neskončne ravnine dobro deluje. Odstopanje je bolj opazno za močno absorbirajoče dele spektra, kjer je $r \gg 1$, kar se ujema z že opaženim obnašanjem modela na sliki 14. Na podlagi izračunanega odboja $R_\infty(\lambda)$ lahko določimo, kakšne barve je takšna neskončna plast pigmenta. V ta namen poračunan spekter pomnožimo in integriramo z ustreznimi odzivnimi funkcijami, kot smo jih definirali v razdelku 4.1.

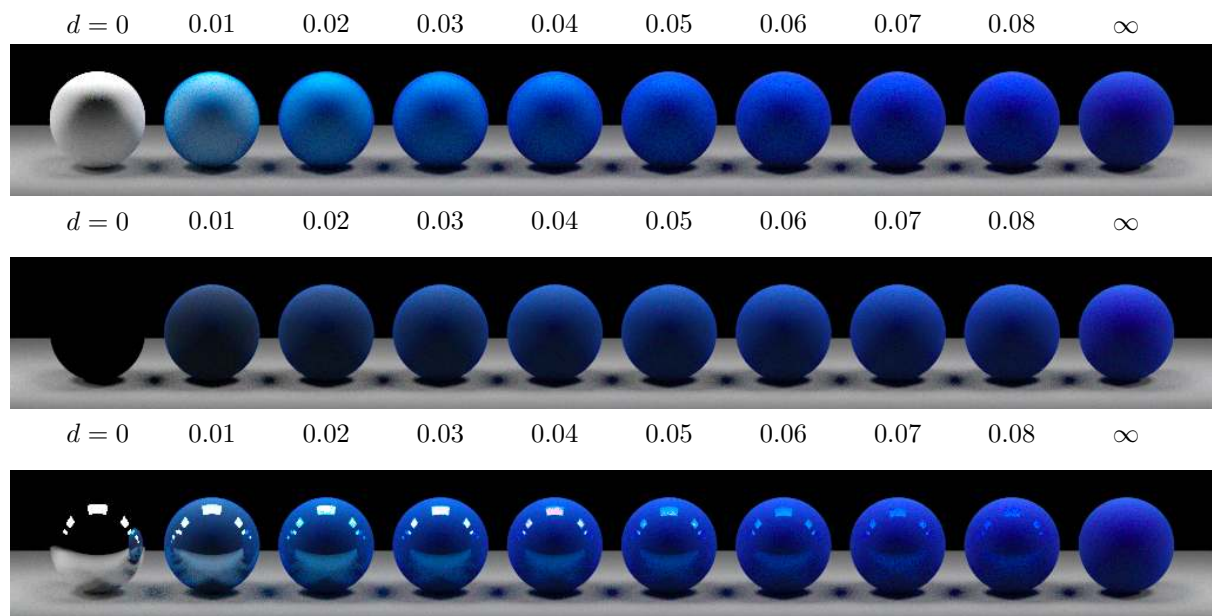
4.3 Vpliv debeline pigmenta na izgled in barvo

Kot smo poračunali za odboj od neskončno debele plasti, lahko poračunamo tudi za končno debele plasti. Na slikah 24, 26 in 28 izračunamo izgled krogle z 100 vzorci na piksel in diskretizacijo spektrov na 32 komponent (kot na sliki 20 desno). Ker je končni prikaz RGB, je število spektralnih kanalov precej irelevantno, le da je $n_\lambda \geq 3$. Dodatni kanali so v večini le izpovprečeni po integraciji z odzivnimi funkcijami.

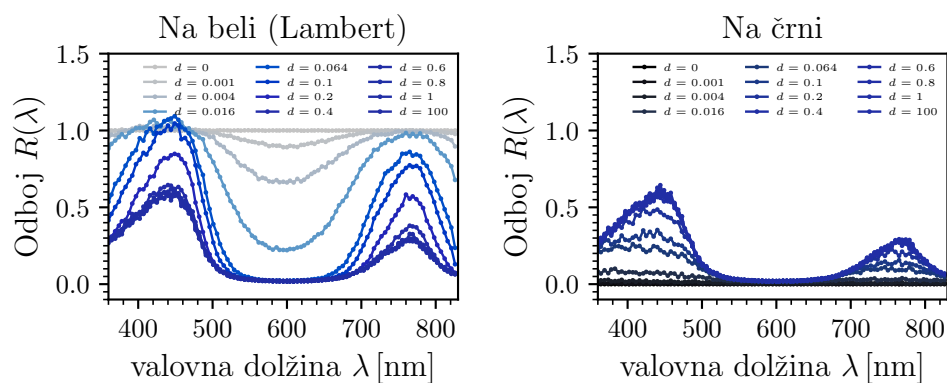
Poleg barv in izgleda si pogledamo tudi dejanske odbojne spektre za končno debelo planarno plast pigmenta na beli in na črni površini (slike 25, 27 in 29). Vidimo, da oblika spektra gladko preide v belo oz. črno barvo glede na debelino sloja pigmenta.



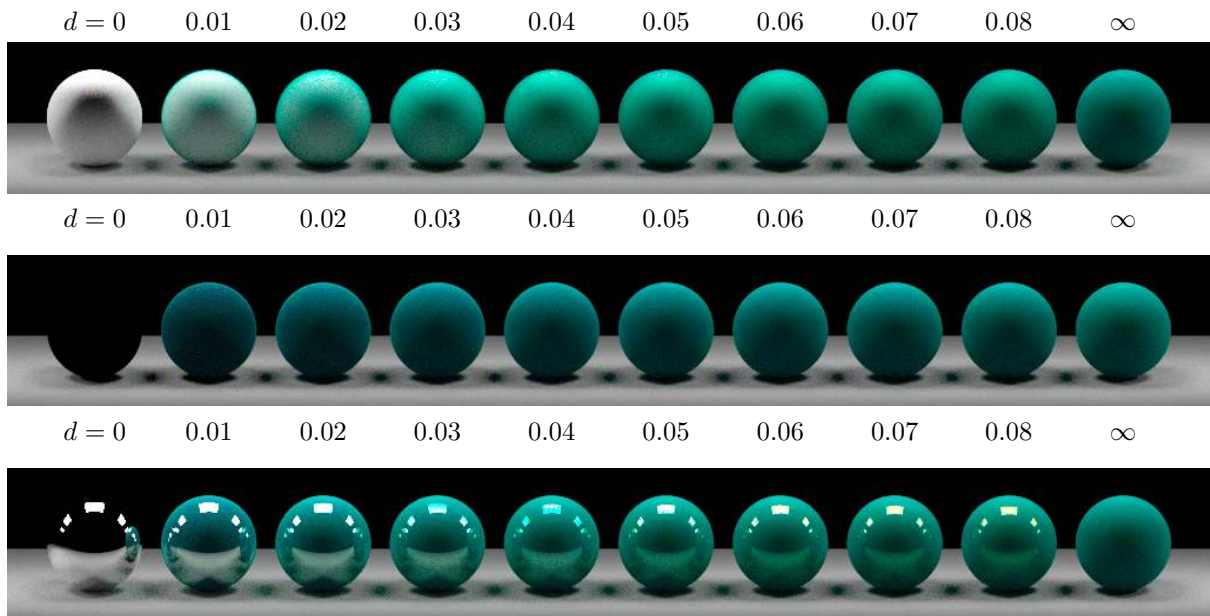
Slika 23: Absorpcijsko-sipalni spekter ochre pigmenta iz [7] in odbojni spekter za neskončno debelo plast takšnega pigmenta R_{∞} . (Levo) Izmerjen in interpolanta. (Desno) Odboj od neskončno debele plasti pigmenta R_{∞} , Monte Carlo izračun z zeleno se lepo ujema z analitično Kubelka-Munk napovedjo. (Skrajno desno) Dejanski primer viridian pigmenta (vir slike: Wikipedia).



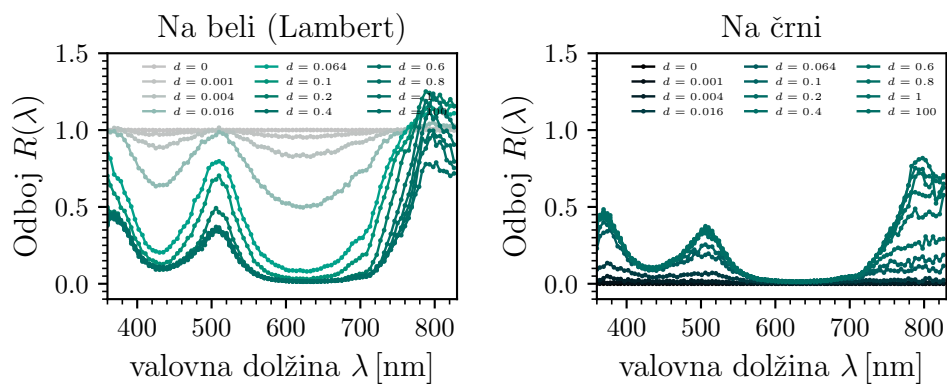
Slika 24: Krogle, obdane z plastjo absorbirajo-sipalnega ultramarine pigmenta, z absorpcijsko-sipalnim spektrom iz slike 21. Plast je nanescna na kroglo z Lambertovim odbojem (zgornja vrstica), na črno kroglo (sredinska vrstica) in na kroglo z zrcalnim odbojem (spodnja vrstica).



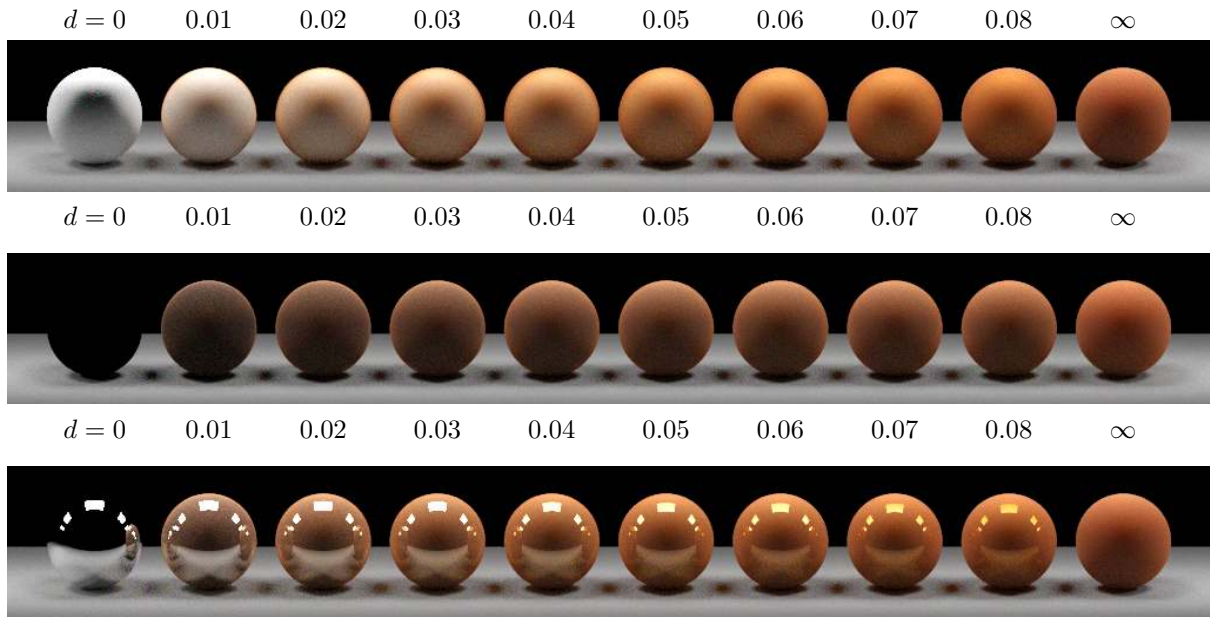
Slika 25: Spreminjanje odbojnega spektra $R(\lambda)$, ko spreminjamo debelino nanosa ultramarine pigmenta na beli (Lambertov odboj) in na črni površini.



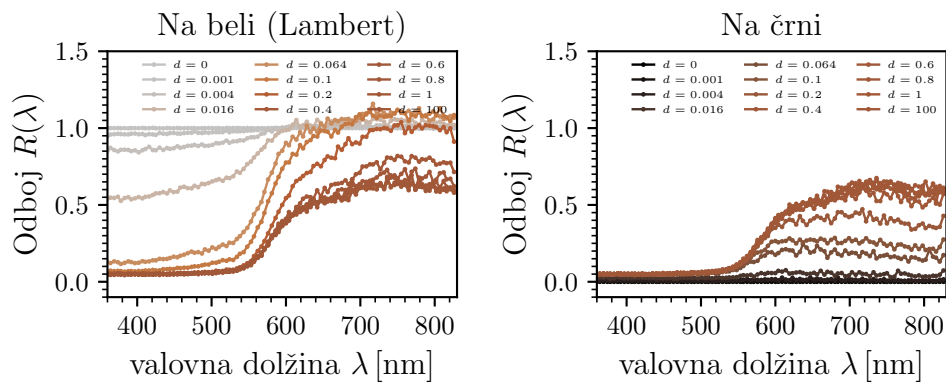
Slika 26: Kroglice, obdane z plastjo absorpcijsko-sipalnega viridian pigmenta, z absorpcijsko-sipalnim spektrom iz slike 22. Plast je nanosena na kroglo z Lambertovim odbojem (zgornja vrstica), na črno kroglo (sredinska vrstica) in na kroglo z zrcalnim odbojem (spodnja vrstica).



Slika 27: Spreminjanje odbojnega spektra $R(\lambda)$, ko spreminjamo debelino nanosa viridian pigmenta na beli (Lambertov odboj) in na črni površini.



Slika 28: Kroglice, obdane z plastjo absorpcijsko-sipalnega ochre pigmenta, z absorpcijsko-sipalnim spektrom iz slike 23. Plast je nanesena na kroglo z Lambertovim odbojem (zgornja vrstica), na črno kroglo (sredinska vrstica) in na kroglo z zrcalnim odbojem (spodnja vrstica).



Slika 29: Spreminjanje odbojnega spektra $R(\lambda)$, ko spreminjamo debelino nanosa ochre pigmenta na beli (Lambertov odboj) in na črni površini.

Zaključek

V nalogi smo simulirali transport svetlobe z Monte Carlo integracijo, s sledenjem potem. Zadovoljen sem, da mi je uspelo z lastno kodo realistično (lastno subjektivno mnenje) simulirati izglede nanosov pigmenta na različne materiale (robne pogoje). Znatni tehnični izziv je predstavljala sama hitrost take integracije, kar sem razrešil z več-pomembnostnim vzorčenjem, z večnitnim izvajanjem programa in z uporabo jezika kot je C.

Literatura

- [1] M. Born, E. Wolf in A.B. Bhatia. *Principles of Optics*. Cambridge University Press, 2019.
- [2] S. Chandrasekhar. *Radiative Transfer*. Dover Publications, 1960.
- [3] John Guild. „The colorimetric properties of the spectrum“. V: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* 230.681-693 (1931), str. 149–187.
- [4] International Commission on Illumination (CIE). *Colour-matching functions of CIE 1931 standard colorimetric observer*. Vienna, Austria: International Commission on Illumination (CIE), 2019.
- [5] James T Kajiya. „The rendering equation“. V: *Proceedings of the 13th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. 1986, str. 143–150.
- [6] Paul Kubelka in Franz Munk. „An article on optics of paint layers“. V: *Z. Tech. Phys* 12.593-601 (1931), str. 259–274.
- [7] Gaël Latour, Mady Elias in Jean-Marc Frigerio. „Determination of the absorption and scattering coefficients of pigments: application to the identification of the components of pigment mixtures“. V: *Applied spectroscopy* 63.6 (2009), str. 604–610.
- [8] V.N. Mahajan. *Optical Imaging and Aberrations: Ray geometrical optics*. SPIE Optical Engineering Press, 1998.
- [9] W.R. McCluney. *Introduction to Radiometry and Photometry, Second Edition*. Artech House, 2014.
- [10] Melissa E. O’Neill. *PCG: A Family of Simple Fast Space-Efficient Statistically Good Algorithms for Random Number Generation*. Teh. poročilo HMC-CS-2014-0905. Claremont, CA: Harvey Mudd College, sep. 2014.
- [11] Michael Stokes in sod. *A Standard Default Color Space for the Internet – sRGB*. <https://www.w3.org/Graphics/Color/sRGB.html>. W3C proposal, retained for historical purposes. Later standardized as IEC 61966-2-1. Nov. 1996.
- [12] Eric Veach. *Robust Monte Carlo methods for light transport simulation*. Stanford University, 1998.
- [13] William David Wright. „A re-determination of the trichromatic coefficients of the spectral colours“. V: *Transactions of the Optical Society* 30.4 (1929), str. 141.